



Школа МАТЕМАТИКЕ

www.rajak.rs



ДЕФИНИЦИЈЕ И ФОРМУЛЕ ЗА ЗАВРШНИ ИСПИТ

Садржај:

1. ЦЕЛИ БРОЈЕВИ	3
2. РАЗЛОМЦИ.....	4
3. ДЕЦИМАЛНИ ЗАПИС	7
4. МЕРЕЊА	8
5. ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ	11
6. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ	12
7. ЛИНЕАРНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ	14
8. СТЕПЕНОВАЊЕ И КВАДРАТНИ КОРЕН	16
9. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА.....	18
10. КВАДРАТ БИНОМА, РАЗЛИКА КВАДРАТА	25
11. ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ	26
12. УГЛОВИ И ПРАВЕ.....	28
13. ТРОУГАО	34
14. СЛИЧНОСТ ТРОУГЛОВА	38
15. ЧЕТВОРОУГАО	39
16. МНОГОУГАО И КРУГ	43
17. ПРИЗМА.....	47
18. ПИРАМИДА	51
19. ВАЉАК	53
20. КУПА	55
21. ЛОПТА.....	57

1. ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

Скуп целих бројева $\mathbb{Z}$ садржи природне бројеве $\{1, 2, 3, \dots\}$, нулу $\{0\}$ негативне целе бројеве $\{-1, -2, -3, \dots\}$, односно важи

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^- = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}.$$

Целе бројеве можемо приказати на бројевној прави:



Два броја су међусобно супротна ако су њима придружене тачке на бројевној прави на једнаком растојању од 0, али са различитих страна. Супротан број броју a је број $-a$. Супротан број броју $-a$ је број $-(-a) = a$. Збир два супротна броја је једнак 0.

Апсолутна вредност броја x чија је ознака $|x|$ дефинише се на следећи начин:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ако је } x > 0, \\ 0, & \text{ако је } x = 0, \\ -x, & \text{ако је } x < 0, \end{cases} \quad \text{тј. } |x| = \begin{cases} x, & \text{ако је } x \geq 0, \\ -x, & \text{ако је } x < 0. \end{cases}$$

Апсолутна вредност је увек **ненегативан** број, и она представља растојање неког броја од 0 на бројевној прави.

Супротни бројеви имају једнаку апсолутну вредност.

Сабирање целих бројева:

Збир два цела броја истог знака има тај исти знак, док је његова апсолутна вредност једнака збиру апсолутних вредности сабирака

Збир два цела броја различитог знака и различитих апсолутних вредности има знак оног сабирка чија је апсолутна вредност већа. Апсолутна вредност збира једнака је разлици апсолутних вредности сабирака, где од сабирка са већом апсолутном вредношћу одузимамо сабирак са мањом апсолутном вредношћу.

Код сабирања целих бројева важе особине:

- Комутативност $a + b = b + a$
- Асоцијативност $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Ако је $a < b$, онда важи $a + c < b + c$.

Множење целих бројева:

Апсолутна вредност производа два цела броја једнака је производу апсолутних вредности тих бројева.

Уколико су оба цела броја истог знака, знак производа је $+$.

Уколико су бројеви различитог знака, онда је знак производа $-$.

За множење бројевима $0, 1, -1$ важе правила:

$$0 \cdot a = 0$$

$$1 \cdot a = a$$

$$-1 \cdot a = -a$$

Код множења целих бројева важе особине:

- Комутативност $a \cdot b = b \cdot a$
- Асоцијативност $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Дистрибутивност множења у односу на сабирање $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.
- Ако је $a < b$ и $c > 0$ онда важи $a \cdot c < b \cdot c$
- Ако је $a < b$ и $c < 0$ онда важи $a \cdot c > b \cdot c$.

Дељење целих бројева:

Количник целих бројева a и b ($b \neq 0$) је број c за који важи $b \cdot c = a$.

Апсолутна вредност количника два броја је једнака количнику апсолутних вредности тих бројева.

Уколико су два цела броја истог знака, количник има знак $+$.

Уколико два цела броја нису истог знака, количник има знак $-$.

Количник 0 и неког броја једнак је 0.

Није дозвољено дељење нулом.

Дељивост:

Број је дељив са 10, 100, 1000, ако су му једна, две, три последње цифре нуле.

Број је дељив са 2 ако је паран.

Број је дељив са 3 уколико му је збир цифара дељив са 3.

Број је дељив са 4, 8, уколико су му последње две, три, ... цифре дељиве датим бројем.

Број је дељив са 5 ако му је последња цифра 0 или 5.

Број је дељив са 9 уколико му је збир цифара дељив са 9.

Број је дељив са 25, 125, ... ако су му последње две, три, цифре дељиве датим бројем.

Прост број је број који је дељив само са собом и бројем 1.

Сложен број је број који има више од два делиоца.

2. РАЗЛОМЦИ

Разломак је количник два природна броја a и b који се записује као $\frac{a}{b} = a : b$.

Број изнад разломачке црте назива се **бројилац**.

Број испод разломачке црте назива се **именилац**.

Разломци $\frac{a}{b}, \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \frac{a:n}{b:n}$ су једнаки.

Разломак $\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ добили смо операцијом проширивања.

Разломак $\frac{a:n}{b:n}$ добили операцијом скраћивања.

Разломак чији су бројилац и именилац узајамно прости бројеви назива се **несводљив разломак**.

Уколико израчунамо количник бројиоца и имениоца добијамо **децималан запис разломка**.

Реципрочна вредност разломка $\frac{a}{c}$ једнака је $\frac{c}{a}$.

Разломак чији је бројилац већи од имениоца се назива **неправи разломак**. Њега можемо претворити у **мешовити број**. Први део мешовитог броја је број целих јединица садржаних у разломку, а други део је прави разломак (онај где је бројилац мањи од имениоца).

Мешовити број облика $A\frac{b}{c}$ претвара се у разломак по принципу $\frac{A \cdot c + b}{c}$.

Упоредивање разломака:

Од два разломка са истим имениоцем, већи је онај који има већи бројилац.

Од два разломка са истим бројиоцем, већи је онај који има мањи именилац.

Сабирање и одузимање разломака:

- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
- $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$
- $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d} \quad \left(\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \right)$

Важе следећа правила:

- $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} - 0 = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0$

Особине сабирања разломака су:

- Комутативност $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$.
- Асоцијативност $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$

Множење разломака:

- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$
- $\frac{a}{b} \cdot 0 = 0$

Особине које важе код множења разломака:

- Комутативност $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$
- Асоцијативност $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$
- Дистрибутивност множења у односу на сабирање $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$

Дељење разломака:

Дељење разломком је исто што и множење његовом реципрочном вредношћу, односно важи:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Ово смо могли записати и као $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$. Овакав тип разломка се зове двојни разломак и

његову вредност израчунавамо на начин

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

3. ДЕЦИМАЛНИ ЗАПИС

Децимални запис се састоји од два низа цифара коју су одвојени децималним зарезом. Сваки разломак можемо представити у децималном запису.

Децимални запис настаје тако што бројилац разломка поделимо имениоцем према стандардним правилима за дељење бројева, с тим што водимо рачуна да када почнемо да „преписујемо“ децималне нуле иза бројилоца, прво ставимо децимални зарез у количник а потом наставимо дељење.

Цифре са леве стране децималног зареза представљају број целих садржаних у разломку, док цифре са десне стране представљају десетине, стотине, хиљадине, ..., односно десете, стоте, хиљаде делове једног целог.

Целе бројеве можемо записати у децималном запису тако што иза децималног зареза дописујемо нуле (произвољно много њих).

Такође, додавање произвољног броја нула испред неће променити вредност броја.

$$3 = 3,000 = 003,000$$

Цифре са десне стране децималног записа називамо децимале.

Децимални запис разломка може да буде коначан (садржи коначан број децимала) или бесконачан (садржи бесконачан број децимала).

Поређење децималних бројева:

Поређење бројева у децималном запису се врши тако што се пореде највеће значајне цифре тих бројева.

Треба, ипак, водити рачуна о следећем:

$0,032 < 0,058$ (обе значајне цифре представљају стотине и важи $3 < 5$)

$0,032 > 0,0058$ (највећа значајна цифра првог броја представља стотине, док највећа значајна цифра другог броја представља хиљадине, стога је први број већи од другог).

Заокруживање децималних бројева:

- Правило 1:** Ако је прва цифра коју одбацујемо 0,1,2,3,4 цифра испред ње се не мења.

$$3,4671 \approx 3,467$$
- Правило 2:** Ако је прва цифра коју одбацујемо 6,7,8,9 цифра испред се увећава за 1.

$$2,277 \approx 2,28$$
- Правило 3:** Ако је прва цифра коју одбацујемо 5, а иза ње има још цифара, онда се цифра испред увећава за 1.

$$3,451 \approx 3,5$$
- Правило 4:** Ако је прва цифра коју одбацујемо 5, а иза ње нема више цифара, онда:

- ❖ Уколико је цифра испред 5 парна, она остаје непромењена.

$$0,25 \approx 0,2$$

- ❖ Уколико је цифра испред 5 непарна, она се повећава за 1.

$$0,15 \approx 0,2$$

Операције са децималним бројевима:

САБИРАЊЕ и ОДУЗИМАЊЕ се врши тако што два децимална броја потпишемо тако да децимални зарези буду један испод другог, а потом применимо „стандардно“ сабирање, односно одузимање.

$$\begin{array}{r} 3,456 \\ +2,731 \\ \hline 6,187 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,456 \\ -2,731 \\ \hline 0,725 \end{array}$$

МНОЖЕЊЕ децималних бројева вршимо тако што помножимо бројеве без децималног зареза, а затим у производу одбројимо здесна онолико децималних места колико има у оба чиниоца.

$$0,07 \cdot 1,32 = 0,0924$$

$$\frac{7 \cdot 132}{924}$$

ДЕЉЕЊЕ бројева у децималном запису врши се тако што код делиоца померимо децимални зарез за онолико места удесно колико је потребно да он постане цео број. Исто толико померамо децимални зарез код дељеника, а онда радимо „стандардно“ дељење.

$$28:0,02 = 2800:2 = 1400$$

4. МЕРЕЊА

ДУЖИНА

Основна мера за дужину је метар (m).

Мање мерне јединице од метра су: дециметар, центиметар и милиметар.

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$$

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

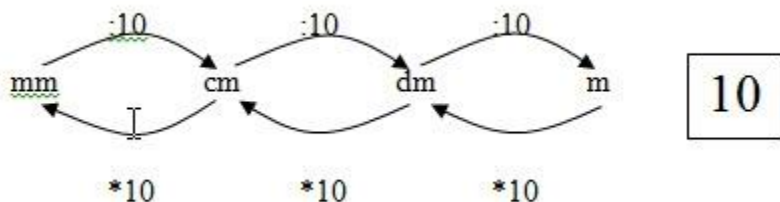
$$1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm} = 0,01 \text{ dm} = 0,001 \text{ m}$$

$$1 \text{ cm} = 0,1 \text{ dm} = 0,01 \text{ m}$$

$$1 \text{ dm} = 0,1 \text{ m}$$

Већа мерна јединица за дужину од метра (m) је километар (km).

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$



Кад претварамо из **веће у мању** мерну јединицу **МНОЖИМО!**

Нпр. $70 \text{ m} = 70 \cdot 100 \text{ cm} = 7000 \text{ cm}$

Приликом претварања из **мање у већу** мерну јединицу **ДЕЛИМО!**

Нпр. $50 \text{ cm} = 50 : 10 \text{ dm} = 5 \text{ dm}$

ПОВРШИНА

Основна јединица мере за површину је квадратни метар m^2 $1 \text{ m}^2 = 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$

Мање мерне јединице од m^2 су: квадратни дециметар (dm^2), квадратни центиметар (cm^2) и квадратни милиметар (mm^2).

$$1 \text{ m}^2 = 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} = 100 \text{ dm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 1\,000 \text{ mm} \times 1\,000 \text{ mm} = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 0,01 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 0,0001 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ mm}^2 = 0,000001 \text{ m}^2$$

Веће мерне јединице су ар (a), хектар (ha) и квадратни километар (km^2).

$$1 \text{ a} = 10 \text{ m} \times 10 \text{ m} = 100 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$$

ЗАПРЕМИНА

Основна јединица за запремину је кубни метар m^3 $1\text{m}^3 = 1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$

Мање мерне јединице за запремину су : кубни дециметар (dm^3) , кубни центиметар (cm^3), кубни милиметар (mm^3).

$$1 \text{ m}^3 = 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} = 1\,000 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ mm} \times 1\,000 \text{ mm} \times 1\,000 \text{ mm} = 1\,000\,000\,000 \text{ mm}^3$$

Основна јединица за мерење течности је **литар (l)**.

Веће мере за мерење течности су: килолитар (kl), хектолитар (hl).

$$1 \text{ kl} = 1000 \text{ l}$$

$$1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$$

Мање мере за мерење течности су: децилитар (dl), центилитар (cl), милилитар(ml).

$$1 \text{ dl} = 0,1 \text{ l}$$

$$1 \text{ cl} = 0,01 \text{ l}$$

$$1 \text{ ml} = 0,001 \text{ l}$$

Веза између запремине и течности: 1 кубни метар једнак је 1000 литара течности:

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$$

1 кубни дециметар је једнак 1 литру:

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ l}$$

МАСА

Основна јединица за масу је килограм (**kg**).

$$1 \text{ kg} = 100 \text{ dg} = 1\,000 \text{ g} = 1\,000\,000 \text{ mg},$$

$$1 \text{ g} = 1\,000 \text{ mg}$$

$$1 \text{ T} = 1\,000 \text{ kg}$$

g –грам, **kg** -килограм, **dg** -декаграм, **mg** -милиграм, **T** -тона

ВРЕМЕ

Основна јединица за мерење времена је секунда.

Мање мере од секунде су милисекунд (ms), микросекунд (μ s), наносекунд (ns).

Веће мерне јединице од секунде су минут (min), сат (h), дан, седмица, месец, година, деценија, век.

$$1 \text{ dan} = 24 \text{ h}$$

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min}$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$1 \text{ dan} = 24\text{h} = 24 \times 60\text{min} = 1440 \text{ min} = 1440 \times 60 = 86\,400 \text{ s}$$

УГЛОВИ

Јединица за мерење углова које користимо у основној школи је степен ($^{\circ}$). Степен је 360. део круга (пуног угла).

Мање јединице од степена су **минут (')** и **секунд('')**.

$$1^{\circ} = 60'$$

$$1' = 60''$$

$$1^{\circ} = 60' = 60 \times 60'' = 3600''$$

5. ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ

Линеарна једначина по x је свака једначина која садржи непознату x а која се еквивалентним трансформацијама може свести на облик

$$a \cdot x = b$$

Типови еквивалентних трансформација за једнакост $A = B$ су

- $A + c = B + c$
- $A - c = B - c$
- $A \cdot c = B \cdot c$
- $A : c = B : c, c \neq 0$

Еквивалентне једначине су једначине које имају исти скуп решења.

Решење линеарне једначине облика $a \cdot x = b$ је сваки број x_0 такав да важи

$$a \cdot x_0 = b$$

За решење линеарне једначине облика $a \cdot x = b$ важи следеће:

- Ако је $a \neq 0$, решење је облика $x = \frac{b}{a}$.
- Ако је $a = b = 0$ једначина постаје $0 \cdot x = 0$, и она има бесконачно много решења.
- Ако је $a = 0, b \neq 0$ једначина нема решења јер множењем непознате x нулом не може настати број различит од нуле.

6. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

Општи облик:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

где су x, y - непознате, а $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ - реални бројеви.

Уколико у задатку не добијете систем у општем облику, пожељно је да га еквивалентним трансформацијама сведете на тај облик. У том смислу, треба обратити пажњу да исте непознате увек пишете једне испод других, ради прегледности и ради лакшег сналажења у систему.

Типови еквивалентних трансформација за једнакост $A = B$ су

- $A + c = B + c$
- $A - c = B - c$
- $A \cdot c = B \cdot c$
- $A : c = B : c, c \neq 0$

Решење система је уређени пар (x_0, y_0) за који важи:

$$a_1x_0 + b_1y_0 = c_1$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 = c_2$$

Методe за решавање система линеарних једначина са две непознате:

МЕТОДА ЗАМЕНЕ

Идеја методе замене је да из једне од једначина изразимо неку променљиву, а потом израз за ту променљиву уврстимо у другу једначину и на тај начин добијемо једну једначину са једном непознатом.

Општа идеја изгледа овако:

$$a_1x + b_1y = c_1 \Rightarrow x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1} \quad (\text{или } y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}) \quad (*)$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Друга једначина сада постаје $a_2 \frac{c_1 - b_1y}{a_1} + b_2y = c_2$ (или $a_2x + b_2 \frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2$), а

то је једначина са једном непознатом.

Када из једначине са једном непознатом изразимо прву непознату у облику $x = x_0$ (односно $y = y_0$), онда на основу израза означеног са (*) можемо добити и другу непознату.

На крају, решење нашег система је уређени пар (x_0, y_0) .

Водите рачуна о томе да када одлучите да радите методу замене, у првом кораку изаберете да изразите ону променљиву која ће вам у даљем решавању задатка задати што мање мука. Најбоља варијанта је изражавати ону променљиву уз коју стоји коефицијент 1 (ако таква постоји).

ГАУСОВА МЕТОДА (МЕТОДА СУПРОТНИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА)

Овде је идеја модификовати обе једначине тако да свака од њих садржи супротне коефицијенте који стоје уз исту променљиву. После овакве модификације, саберемо 2 једначине, и поменута променљива нам се изгуби. Оно што преостане је једначина са једном непознатом. Из ње изразимо непознату, а уврштавањем вредности те непознате у једну од почетне две једначине, можемо изразити и другу променљиву. На крају, решење система је уређени пар (x_0, y_0) .

Ову методу ћемо илустровати примером:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 5 \\ -5x + y = -6 \quad | \times 3 \\ \hline + \quad \begin{array}{r} 2x - 3y = 5 \\ -15x + 3y = -18 \\ \hline \end{array} \\ \hline -13x = -13 \\ x = 1 \\ \hline \begin{array}{r} 2 \cdot 1 - 3y = 5 \\ -3y = 5 - 2 \\ -3y = 3 \\ y = -1 \end{array} \end{array}$$

Решење система је уређени пар $(1, -1)$.

И код ове методе важи да модификацијама система које радимо тежимо да постигнемо облик што једноставнији за рачунање.

Обе методе доводе до истог решења, те је на вама да изаберете ону методу која вам се у датом задатку учини погоднијом за решавање.

Системи код којих добијемо једно решење (односно један уређени пар решења) називају се одређени системи. Осим њих постоје тзв. неодређени системи (системи који имају бесконачно много решења) и контрадикторни (немогући) системи (системи који немају ниједно решење).

7. ЛИНЕАРНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ

Линеарна неједначина по x је свака неједначина која се еквивалентним трансформацијама може свести на један од следећих облика:

$$ax < b, \quad ax \leq b, \quad ax > b, \quad ax \geq b,$$

где је x непозната променљива а a и b су реални бројеви.

Решење неједначине је сваки број који када се замени у неједначину уместо променљиве даје тачну неједнакост.

Неједначине се могу решавати у било ком скупу бројева, но потребно је строго водити рачуна који **скуп** се тражи у конкретном задатку.

На пример, решење неједначине облика $x < 3$

у скупу природних бројева је $\{1,2\}$,

у скупу природних бројева са нулом је $\{0,1,2\}$,

у скупу целих бројева је $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ или краће записано $x \in (-\infty, 2], x \in \mathbb{Z}$

у скупу реалних бројева решење је скуп $(-\infty, 3), x \in \mathbb{R}$

Решење неједначине облика $x \leq 3$

у скупу природних бројева је $\{1,2,3\}$,

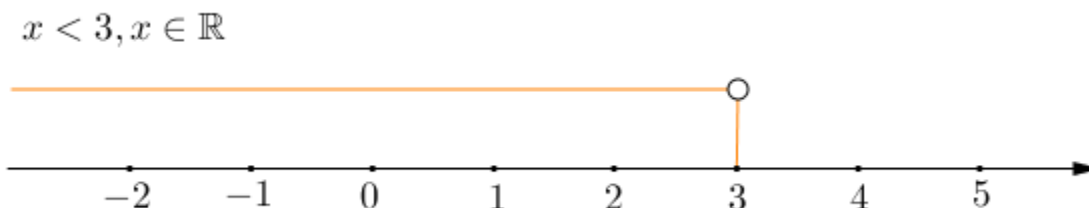
у скупу природних бројева са нулом је $\{0,1,2,3\}$,

у скупу целих бројева је $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ или краће $x \in (-\infty, 3], x \in \mathbb{Z}$,

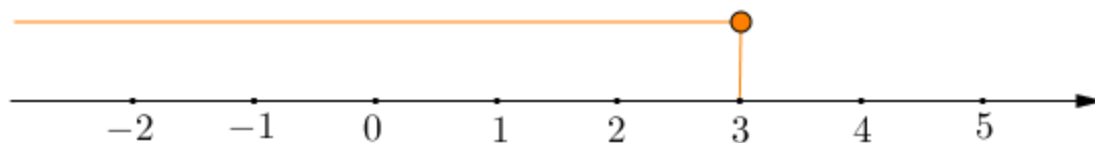
у скупу реалних бројева решење је скуп $x \in (-\infty, 3], x \in \mathbb{R}$

Напомена: Обратите пажњу на изглед заграда у запису за скупове целих и реалних бројева.

Скуп решења линеарне неједначине може се приказати помоћу бројевне праве. Најчешће бројевна права служи за приказ решења у скупу реалних бројева, мада се може користити и за друге скупове. Ево неких примера:



$$x \leq 3, x \in \mathbb{R}$$



Празан кружић изнад броја означава да тај број није решење неједначине, док пун кружић означава да тај број јесте решење неједначине.

ВАЖНО: Знак неједнакости је „осетљив“ на множење или дељење неједначине негативним бројем. Ове операције мењају знак. Ову особину илустроваћемо примером:

$$\begin{aligned} 4 - 2x &< 3 \\ -2x &< 3 - 4 \\ -2x &< -1 & | \times (-1/2) \\ x &> 1/2 \end{aligned}$$

8. СТЕПЕНОВАЊЕ И КВАДРАТНИ КОРЕН

Степеновање:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, \quad a \neq 0, \quad a \neq 1, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

a – основа степена, n – изложилац

У општем случају n не мора бити природан број, но за сада ћемо се задржати само на степеновању код кога је изложилац природан број.

Операције са степенима: $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad m, n \in \mathbb{N}$

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}, m > n$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^n)^m = a^{m \cdot n}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $0^n = 0, n \in \mathbb{N}$
- $1^n = 1, n \in \mathbb{N}$

Код степеновања увек треба обратити пажњу на знак основе. Важе следећа правила:

- $(-a)^{2n} = a^{2n}$
- $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$
- $-a^{2n} = -a^{2n}$ (степен не утиче на минус ако нема заграде)
- $-a^{2n+1} = -a^{2n+1}$ (степен не утиче на минус ако нема заграде)

Квадратни корен:

Запис: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$, a – поткорена величина

Правило:

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Квадратни корен неког броја је ненегативан број који када се квадрира да поткорену величину.

Важе следеће особине:

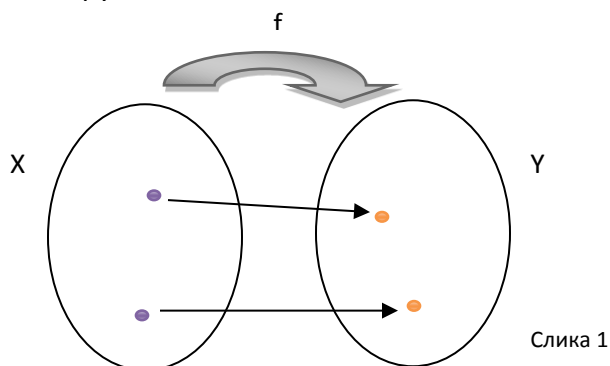
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ОБРАТИТЕ ПАЖЊУ:

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$

9. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Функција је математички појам који представља пресликавање чланова једног скупа на други.

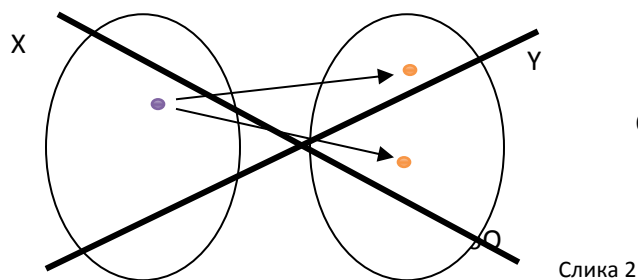


Запис: $Y = f(X)$

X – оригинал

Y - слика

Код математичког пресликавања тј. функције један оригинал може имати само једну слику, јер у супротном пресликавање није функција, односно:



Ово пресликавање није функција.

Линеарна функција дефинисана на скупу реалних бројева је функција $y = f(x)$ одређена са

$$y = kx + n$$

где су k и n - реални бројеви.

Функција записана на овај начин назива се експлицитно задата функција.

- k је коефицијент правца линеарне функције
- n је слободан члан који представља одсечак на y – оси.

Осим у експлицитном, функција може бити задата и у имплицитном облику, односно у облику

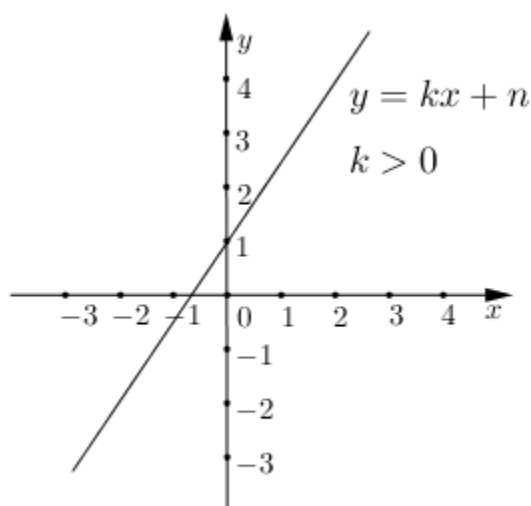
$$ax + by + c = 0$$

Треба водити рачуна о томе да коефицијент правца и вредност одсечка на y – оси можемо читати само из експлицитног облика.

Дефинисаност функције на скупу реалних бројева значи да за сваку вредност x можемо пронаћи одговарајућу вредност $y = kx + n$.

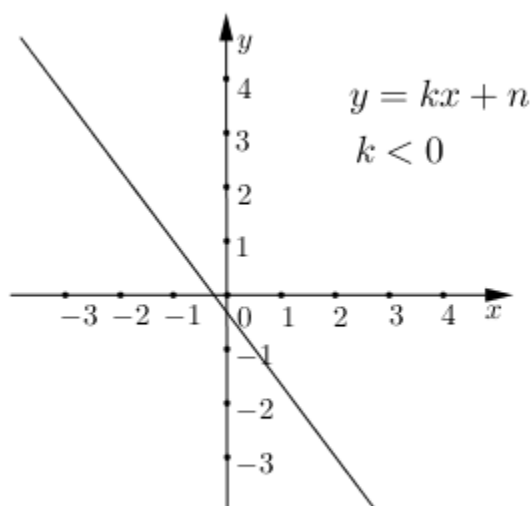
График линеарне функције је **права** чије је „понашање“ одређено управо вредностима k и n . Њу уцртавамо у координатни систем представљен помоћу две осе које се секу под правим углом. Доња оса означава вредност координате x , док су на оси са леве стране приказане вредности y .

За $k > 0$, функција је растућа и њен график је облика:



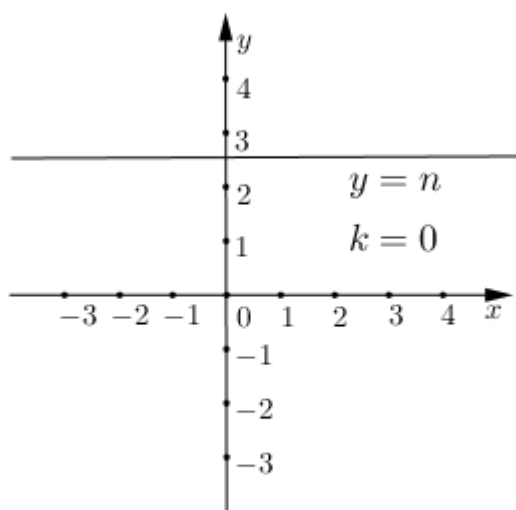
Слика 3

За $k < 0$, функција је опадајућа и њен график је облика:



Слика 4

За $k = 0$ график функције је паралелан са x – осом, а осу y сече у вредности n .



Слика 5

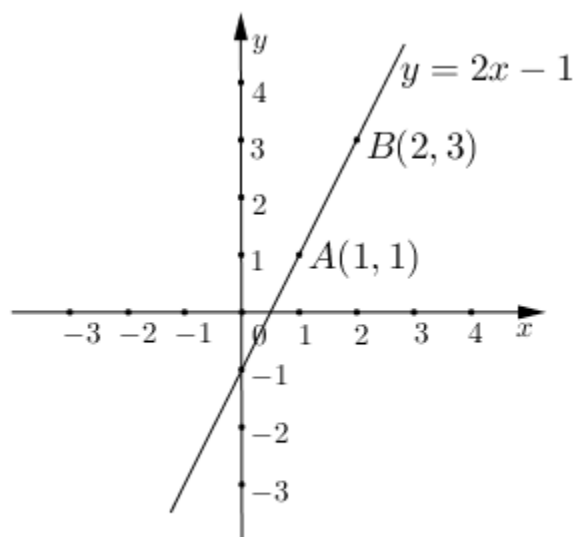
Раст функције $y = kx + n$ говори нам о томе да за пораст вредности x расте и вредност y .

Нпр. ако нам је задата линеарна функција облика $y = 2x - 1$, тада имамо:

за $x = 1$, $y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ (A)

за $x = 2$, $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ (B)

Прикажимо то графички:



Слика 6

Обратите пажњу на начин записа тачака на графику.

Координате тачке записујемо у облику (x, y) , односно на прво место стављамо координату коју читамо на x -оси, док на друго место иде координата коју читамо са y -осе.

$A(1,1)$ $B(2,3)$

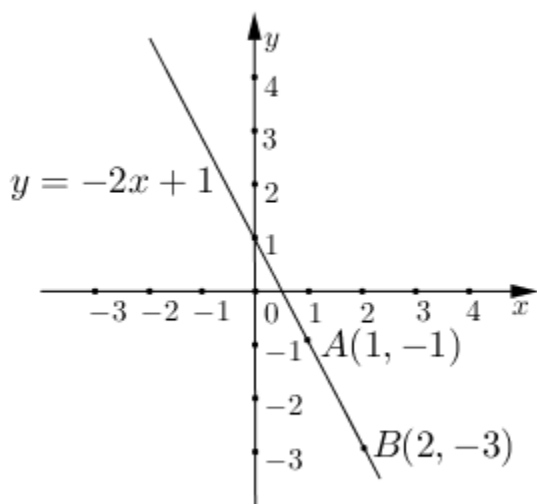
ад функције нам говори да за повећање вредности x имамо смањивање вредности y .

Нпр. ако нам је задата линеарна функција облика $y = -2x + 1$, тада имамо:

за $x = 1$, $y = -2 \cdot 1 + 1 = -1$ (A)

за $x = 2$, $y = -2 \cdot 2 + 1 = -3$ (B)

Прикажимо то графички:

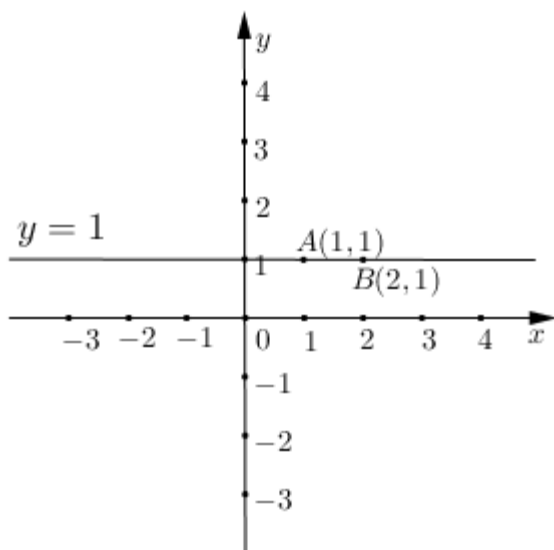


Слика 7

Обратите пажњу:

- За $k > 0$, рекли смо, функција је растућа. Међутим, што се вредност k повећава, функција расте све брже, односно њен нагиб је све већи.
- За $k < 0$, рекли смо, функција је опадајућа. Међутим, што је вредност k мања, функција опада све брже, односно пад је све оштрији.

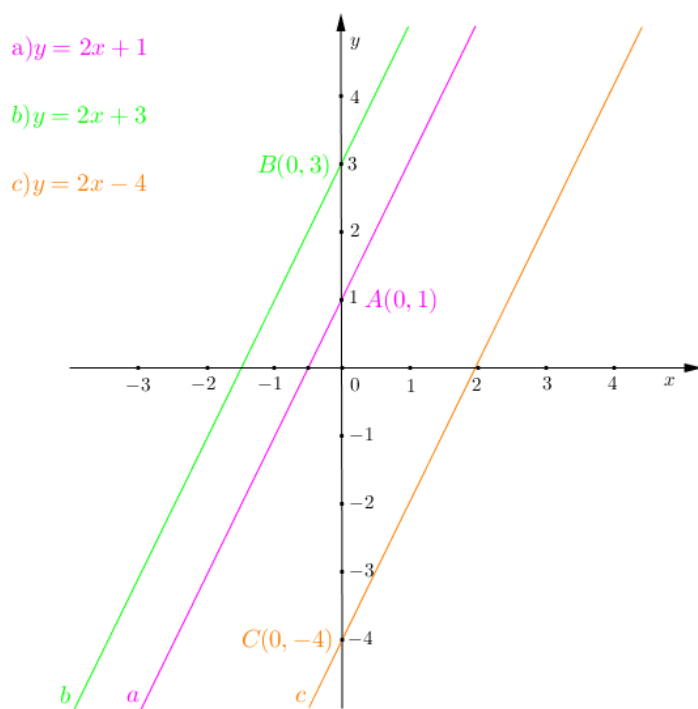
Ако је $k = 0$, вредност y је једнака за све вредности x .



Слика 8

Као што је раније помињано, вредност n означава величину одсечка на y —оси. Посматрајмо сада три различите линеарне функције (означићемо те праве словима a, b, c) са једнаким коефицијентом k , а нека се вредности за n разликују.

Графички:



Слика 9

Посматрајмо шта се код све три праве дешава за $x = 0$.

Видимо да права a тада сече y -осу у тачки $A(0,1)$, права b у тачки $B(0,3)$, а права c у тачки $C(0,-4)$.

Вредности 1,3,-4 управо су вредности параметра n за ове праве a, b, c редом.

Из последњег графичког приказа, можемо приметити да су ове три праве паралелне. Њихови коефицијенти правца једнаки. Закључујемо:

Две праве (или више њих) су паралелне уколико имају једнаке коефицијенте правца.

Како цртамо график функције?

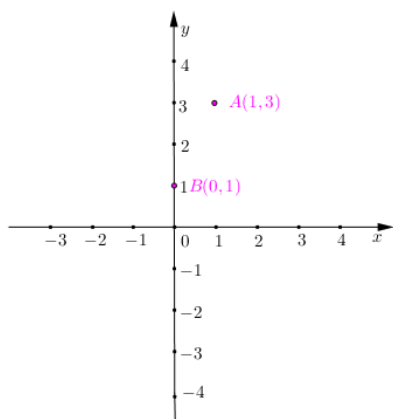
Нпр. желимо да нацртамо график функције $y = 2x + 1$.

За цртање графика линеарне функције, довољне су нам само две тачке. Бирамо произвољно две вредности за x , и за њих израчунамо вредност y . Добијамо 2 тачке које представљамо уређеним паровима (x, y) . Уцртамо ове две тачке у координатни систем, а затим кроз те две тачке повучемо праву.

$$x = 1, \quad y = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \quad A(1,3)$$

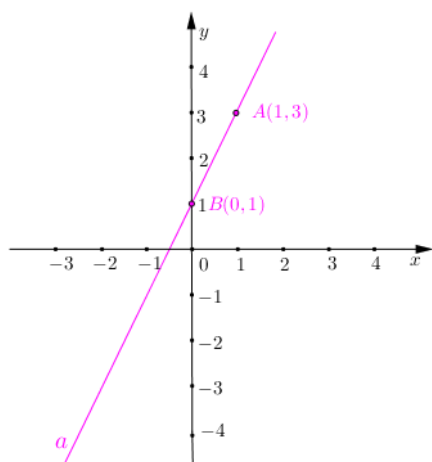
$$x = 0, \quad y = 2 \cdot 0 + 1 \quad B(0,1)$$

Корак1:



Слика 10

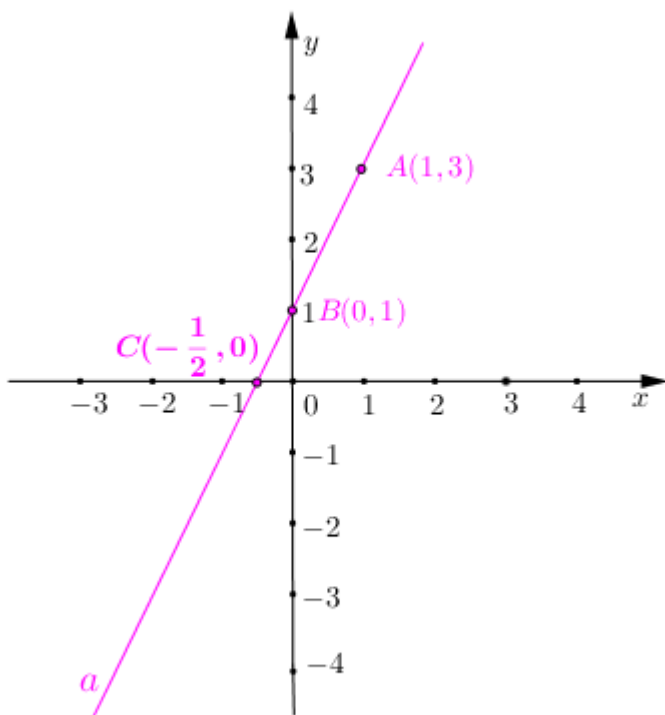
Корак2:



Слика 11

Решење једначине $kx + n = 0$, $x_0 = -\frac{n}{k}$, $k \neq 0$, назива се нула функције. Ово је заправо тачка пресека праве $y = kx + n$ са x -осом.

Нпр. за линеарну функцију $y = 2x + 1$, нула функције је решење једначине $2x + 1 = 0$, а то је вредност $x = -\frac{1}{2}$.



Слика 12

Приметимо да је лево од тачке $C(-\frac{1}{2}, 0)$ знак функције негативан, односно вредност y је мања од 0 за све вредности x које су мање од $-\frac{1}{2}$. За вредности x веће од $-\frac{1}{2}$, вредност функције је позитивна.

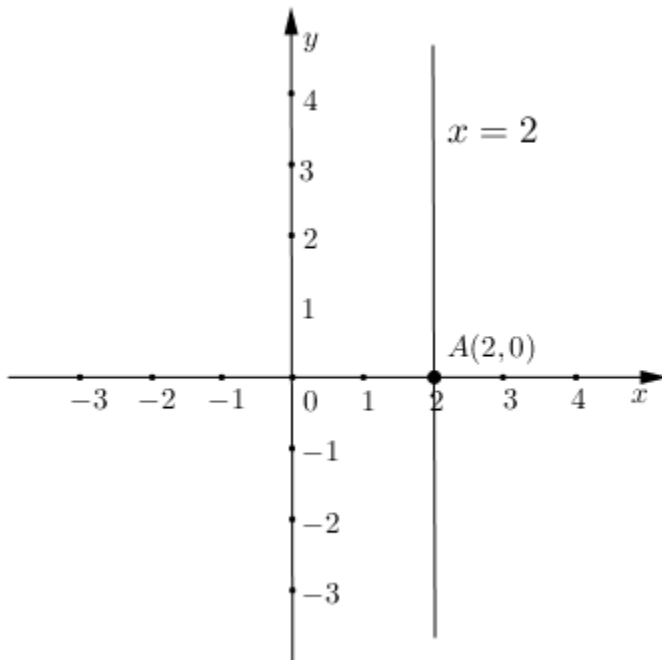
Запишимо ово мало прегледније помоћу таблице:

$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$x > -\frac{1}{2}$
$y < 0$	$y = 0$	$y > 0$

Водите рачуна о следећем:

- Права $y = 0$ је x -оса
- Права $x = 0$ је y -оса
- Права $x = c$ је паралелна са y -осом, а x -осу, сече у тачки са координатама $(c, 0)$.

Графички приказ функције $x = 2$:



10. КВАДРАТ БИНОМА, РАЗЛИКА КВАДРАТА

Квадрат бинома:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad (\text{квадрат збира})$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad (\text{квадрат разлике})$$

Разлика квадрата:

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

Водите рачуна да мономи које смо обележили словима a и b у општем случају не морају бити састављени од једног слова или једног броја. Унутар монома може бити и неки коефицијент, заграда, знак $\cdot$, разломак, итд.

ОБРАТИТЕ ПАЖЊУ:

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

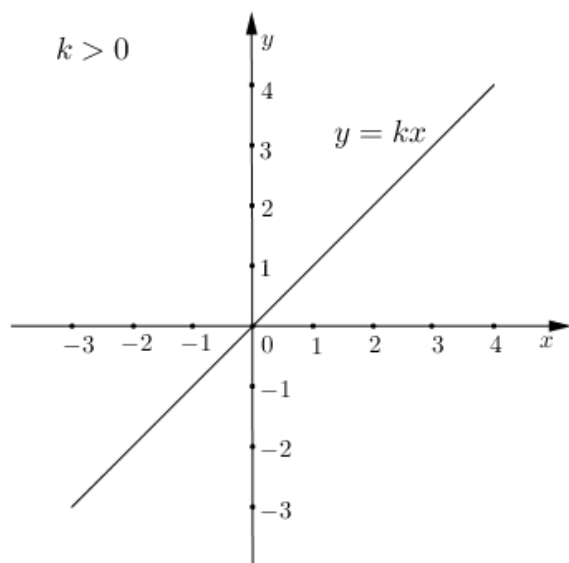
$$(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$$

11. ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ

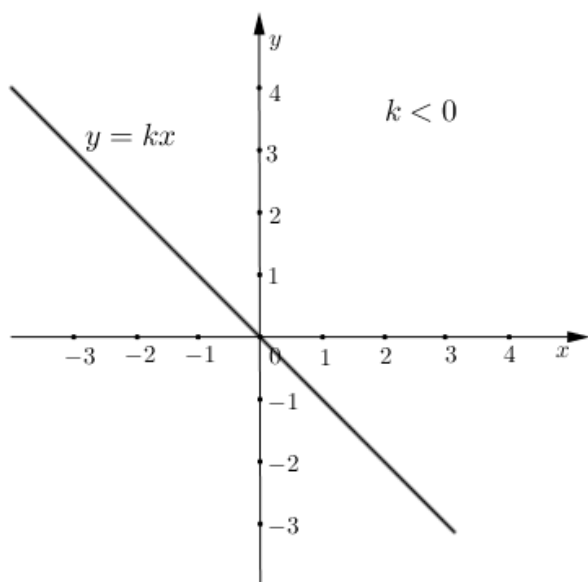
Директна пропорционалност:

Функција облика $y = k \cdot x$, $x, y \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ назива се директна пропорционалност.

Кажемо да су x и y директно пропорционални док је k коефицијент пропорционалности.



Слика1: Од пораста x директно зависи пораст y .



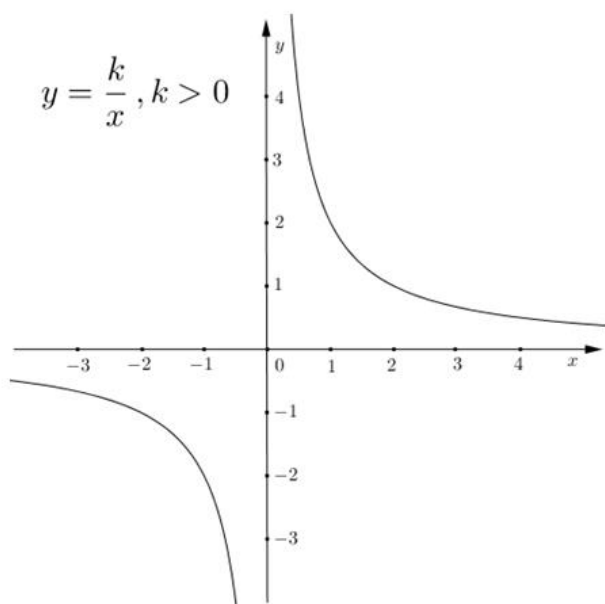
Слика2: Од пораста x директно зависи опадање y .

График функције $y = k \cdot x$, $x, y \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ је **права линија**.

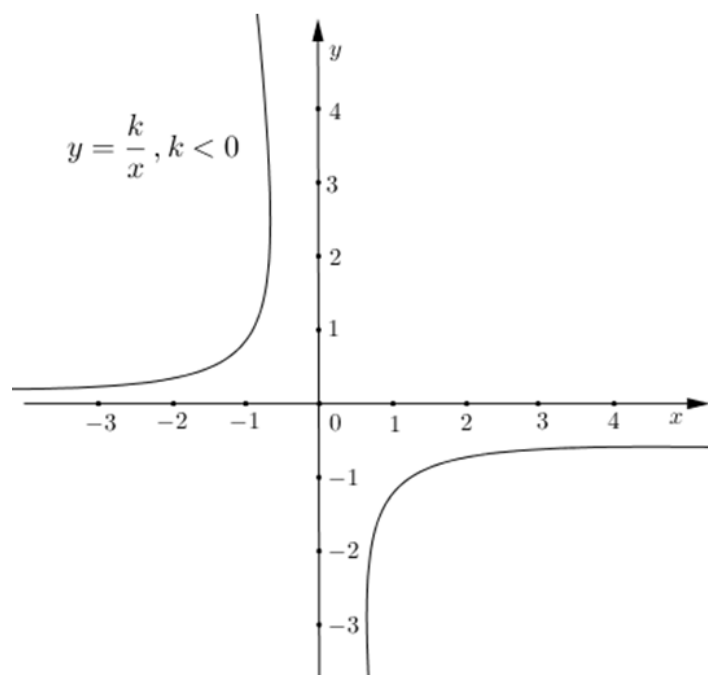
Обрната пропорционалност:

Функција облика $y = \frac{k}{x}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $k \neq 0, x \neq 0$ назива се обрната пропорционалност.

Кажемо да су x и y обрнуто пропорционални док је k коефицијент обрнуте пропорционалности.



Слика3: У првом квадранту са порастом x опада y , док у трећем квадранту са опадањем x расте y .



Слика4: У другом квадранту са порастом x расте y , док у четвртном квадранту са растом x расте y .

График функције $y = \frac{k}{x}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $k \neq 0, x \neq 0$ је **хипербола**.

Пропорционалност:

Једнакост $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ где су x_1, x_2, y_1, y_2 реални бројеви назива се пропорција.

x_1 и y_2 називамо спољашњим члановима, док x_2 и y_1 називамо унутрашњим члановима.

Важи да је производ спољашњих чланова једнак производу унутрашњих чланова.

$$x_1 \cdot y_2 = x_2 \cdot y_1$$

Најчешће нам је непозната једна од величина x_1, x_2, y_1, y_2 а њу добијамо управо изједначавањем производа унутрашњих чланова са производом спољашњих чланова.

12. УГЛОВИ И ПРАВЕ

Аксиоме су математичка тврђења која се прихватају и не доказују.

Тачка, права и раван су аксиоматски појмови, односно не постоји њихова дефиниција, нити их можемо доказати, мада – на њима се базира читава нама позната геометрија.

Права:

Аксиоми:

- Од свих линија од тачке А до тачке В права линија је најкраћа.
- Права је одређена са 2 тачке.

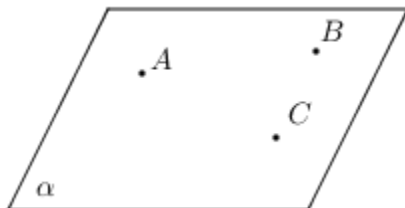


Раван:

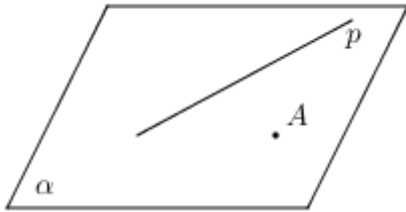
Аксиоми:

Раван је одређена:

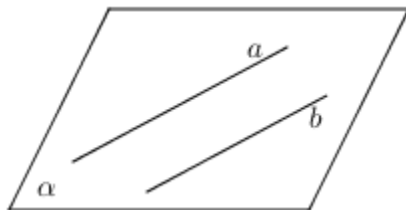
- Са три различите тачке које не припадају једној правој.



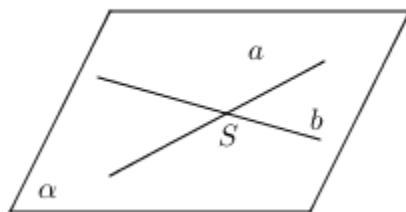
- Једном правом и једном тачком ван ње.



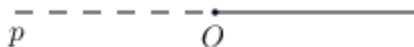
- Са две паралелне праве



- Са две праве које се секу.



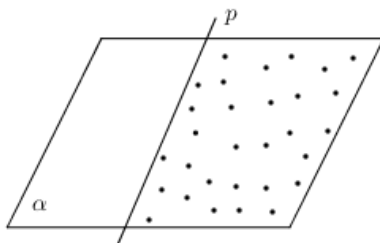
Полуправа је скуп тачака које припадају некој правој p , а састоји се од једне тачке O и свих тачака које су са исте стране тачке O .



Дуж је скуп тачака праве која садржи две њене тачке A и B и све тачке које се налазе између њих. Тачке A и B се називају крајевима дужи.

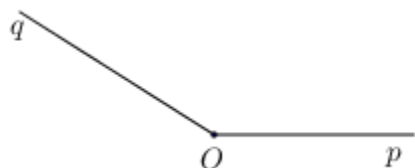


Полураван је скуп тачака неке равни α који се састоји од свих тачака неке праве $p, p \subset \alpha$ и свих осталих тачака које се налазе у тој равни са исте стране праве p .

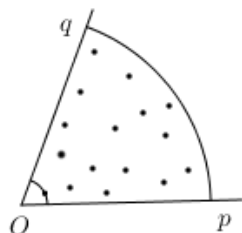


Каже се да права p дели раван α на две полуравни.

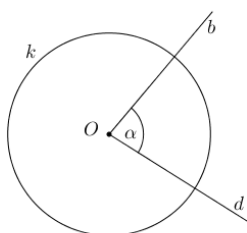
Угаона линија је унија двеју полуправих Op и Oq . Тачку O називамо **теме**, док полуправе Op и Oq представљају **краке угаоне линије**.



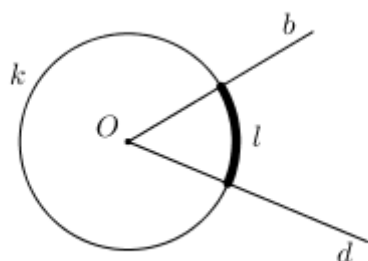
Угао је унија угаоне линије и свих тачака у равни које су са исте стране те угаоне линије. Угао означавамо са $\angle pOq$.



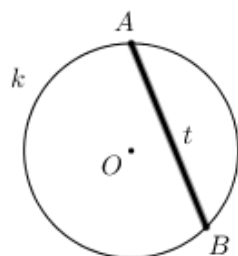
Централни угао кружне линије је угао чије је теме у центру те кружне линије.



Кружни лук је део кружне линије који је садржан у једном његовом централном углу.



Тетива је дуж која спаја две тачке кружне линије. Најдужа тетива је **пречник** круга.



Врсте углова:

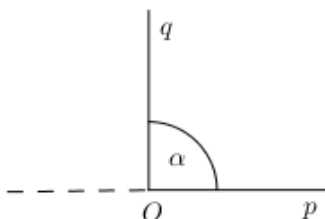
опружен угао

$$\alpha = 180^\circ$$



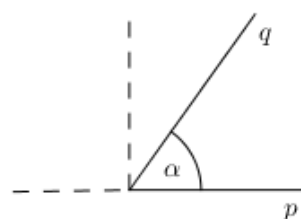
прав угао

$$\alpha = 90^\circ$$



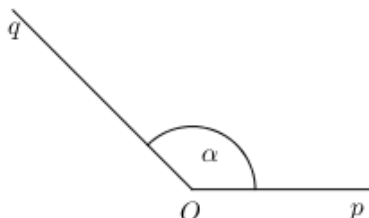
оштар угао

$$\alpha < 90^\circ$$



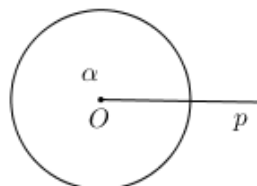
туп угао

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$



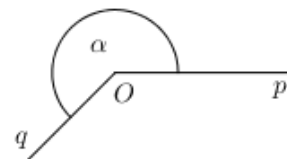
пун угао

$$\alpha = 360^\circ$$



испупчен угао

$$180^\circ < \alpha < 360^\circ$$



Степен (1°) је основна јединица мере угла. То је угао који је једнак 360-ом делу пуног угла.

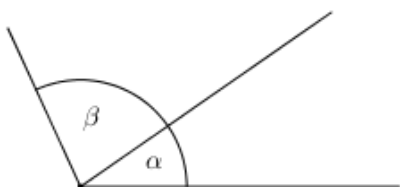
Мање јединице мере су минут ($1'$) и секунд ($1''$).

$$1^\circ = 60', 1' = 60''$$

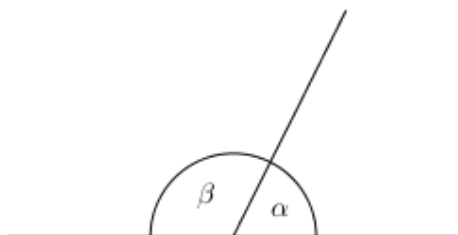
Углови су **комплементни** ако у збиру дају прав угао.

Углови су **суплементни** ако у збиру дају опружен угао.

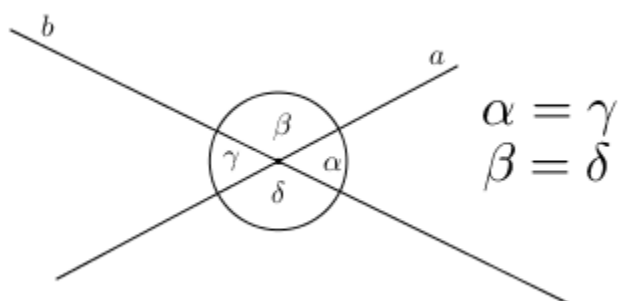
Угао α је суседан углу β ако се β надовезује на α .



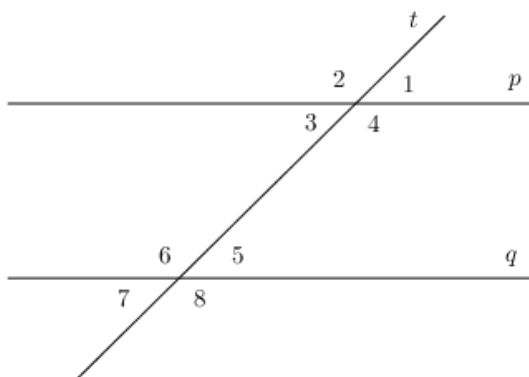
Суседни углови који су суплементни називају се **упоредни** углови.



Унакрсни углови су свака два несуседна удубљена угла одређена двама правим које се секу и њихови краци припадају по један свакој од ових правих.



Ако у равни права t сече две паралелне праве p и q , онда праву t називамо **трансверзала** правих p и q .

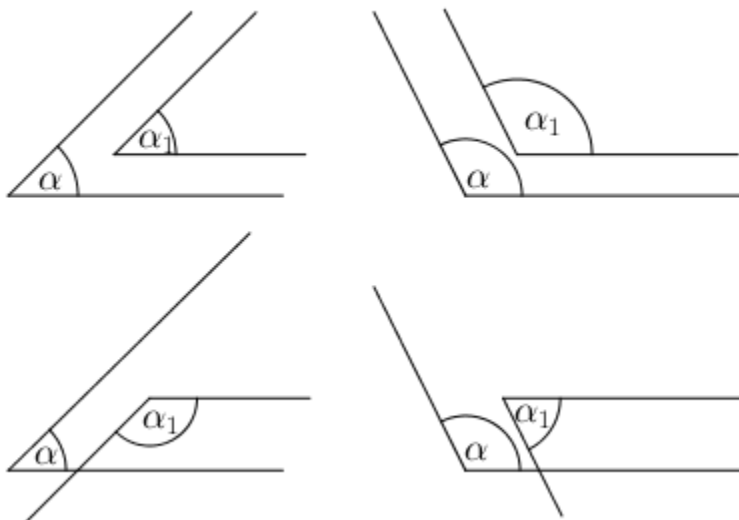


Парови углова: $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$; $\angle 4$ и $\angle 8$ су сагласни и једнаки су.

Парови углова: $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$; $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$ су посредно унакрсни и једнаки су.

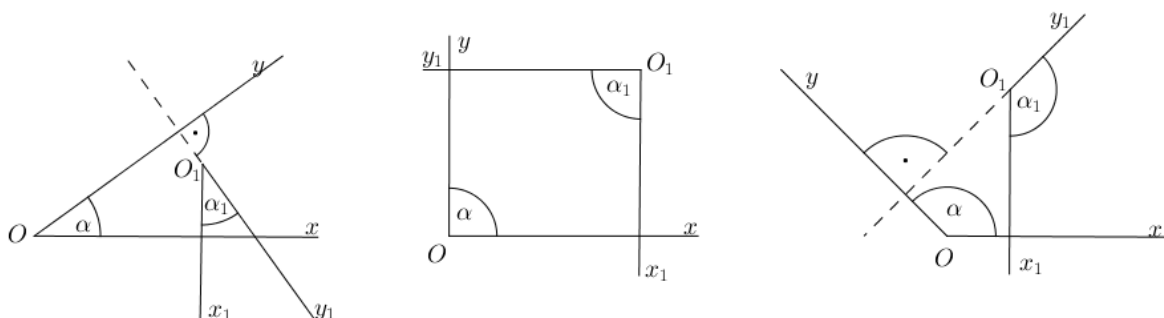
Парови углова: $\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$; $\angle 3$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 5$ су посредно упоредни и суплементни су.

Ако си два угла у равни **углови са паралелним крацима**, онда су та два угла или једнаки или суплементни.

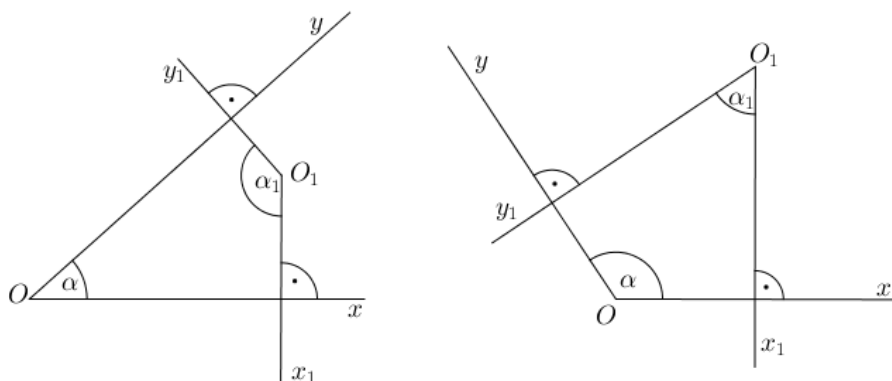


Два **удубљена угла са нормалним крацима** су:

- Једнака, ако су оба оштра, оба права или оба тупа

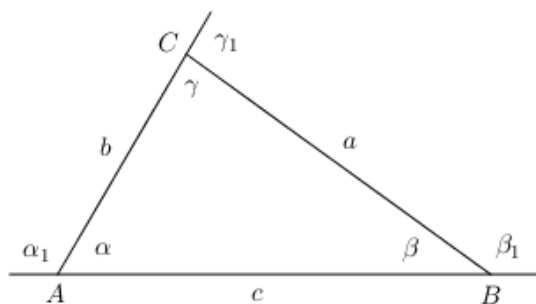


- Суплементна, ако је један оштар а други туп (или су оба права)



13. ТРОУГАО

Углови троугла:



Збир унутрашњих углова троугла је 180° , односно $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Збир спољашњих углова троугла је 360° , односно $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ$.

Спољашњи угао троугла једнак је збиру два њему несуседна унутрашња угла, нпр.

$$\beta_1 = \alpha + \gamma.$$

Однос страница троугла:

У сваком троуглу, свака страница је мања од збира, а већа од апсолутне вредности разлике друге две странице, односно важи

$$|BC - AC| < AB < BC + AC$$

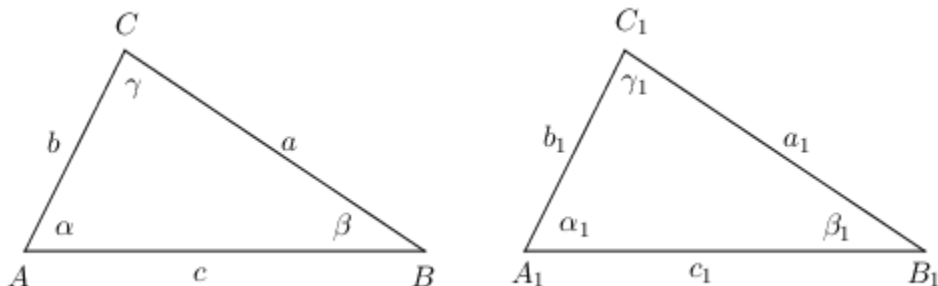
Однос страница и углова у троуглу:

У сваком троуглу важи

- наспрам две једнаке странице налазе се једнаки углови, (ако је $AB = BC$, онда је $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \alpha$),
- наспрам једнаких углова налазе се једнаке странице, (ако је $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \alpha$, онда је $AB = BC$),
- наспрам већег угла налази се дужа страница (ако је $\sphericalangle \alpha < \sphericalangle \gamma$, онда је $BC < AB$)
- наспрам дуже странице налази се већи угао (ако је $BC < AB$, онда је $\sphericalangle \alpha < \sphericalangle \gamma$).

Подударност троуглова:

Два троугла су подударна (ознака $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$) ако су сви елементи једног троугла једнаки одговарајућим елементима у другом троуглу.



Ставови о подударности троуглова:

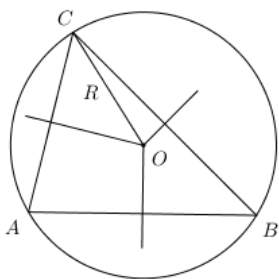
Два троугла су подударна ако:

1. су им једнаке по две странице и њима захваћен угао (**СУС**)
(нпр. ако је $a = a_1, b = b_1, \angle \gamma = \angle \gamma_1$, онда је $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$).
2. им је једнака по једна страница и два угла налегла на ту страницу (**УСУ**)
(нпр. ако је $b = b_1, \angle \gamma = \angle \gamma_1, \angle \alpha = \angle \alpha_1$, онда је $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$).
3. су им једнаке три одговарајуће странице (**ССС**)
(нпр. ако је $a = a_1, b = b_1, c = c_1$ онда је $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$)
4. су им једнаке две странице и угао наспрам дужице од тих страница. (**ССУ**)
(нпр. ако је $a = a_1, b = b_1, \angle \alpha = \angle \alpha_1$, онда је $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$).

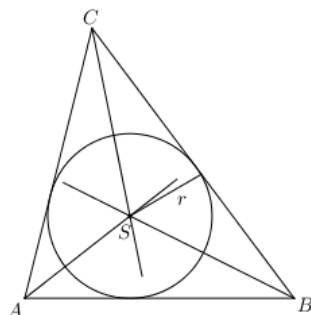
Значајне тачке троугла:

Центар описане кружнице око троугла је пресек симетрала страница тог троугла. Код оштроуглог троугла, он се налази унутар троугла. Код правоуглог троугла, центар описане кружнице се поклапа са средиштем хипотенузе. Код тупоуглог троугла, центар описане кружнице је ван троугла.

Центар уписане кружнице троугла налази се у пресеку симетрала унутрашњих углова тог троугла.



Описана кружница



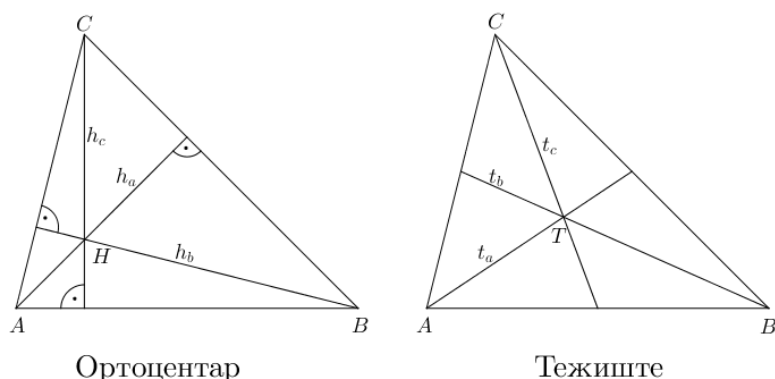
Уписана кружница

Ортоцитар троугла је тачка пресека правих одређених висинама тог троугла. Код оштроуглог троугла, он се налази унутар троугла. Код правоуглог троугла, ортоцитар се поклапа са теменом правог угла. Код тупоуглог троугла, ортоцитар је ван троугла.

Тежишна дуж троугла је дуж која спаја једно теме тог троугла са средиштем странице која је наспрамна том темену.

Тежиште троугла је пресек тежишних дужи троугла.

Тежиште троугла дели тежишну дуж у односу 2:1.



Код једнакокраког троугла све четири значајне тачке троугла налазе се на симетрали основице, док се код једнакостраничног троугла све тачке поклапају.

Обим троугла је збир дужина страница тог троугла, односно

$$O = a + b + c.$$

Површину троугла рачунамо помоћу формуле

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

где су h_a, h_b, h_c висине које одговарају страницама a, b, c .

Површину правоуглог троугла рачунамо помоћу формула

$$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

За правоугли троугао важи:

$$R = \frac{c}{2}, \quad r = \frac{a + b - c}{2}$$

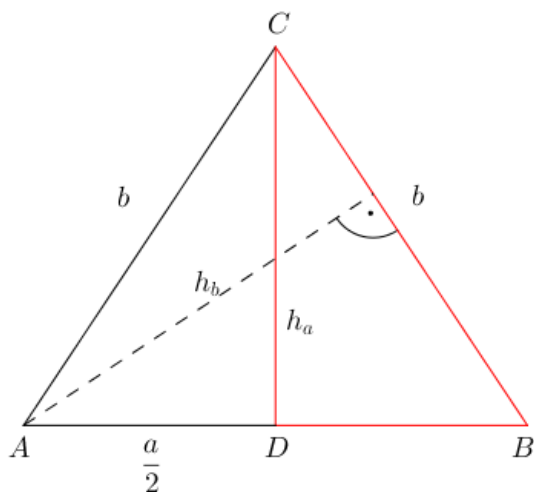
Где је R центар описане кружнице око тог троугла, а r центар уписане кружнице троугла.

Питагорина теорема: Квадрат над хипотенузом правоуглог троугла једнак је збиру квадрата над катетама тог истог троугла, односно



На основу Питагорине теореме, можемо извести неке значајне формуле за једнакокраки и једнакостранични троугао.

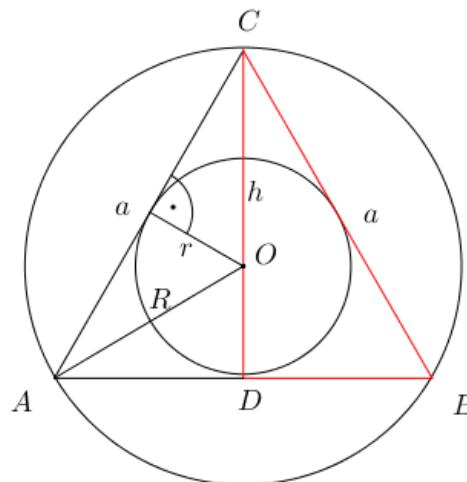
Једнакокраки троугао



$$h_a = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

Једнакостранични троугао



$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}, \quad a = \frac{2}{3} h \sqrt{3}$$

$$P = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}, \quad P = \frac{1}{3} h^2 \sqrt{3}$$

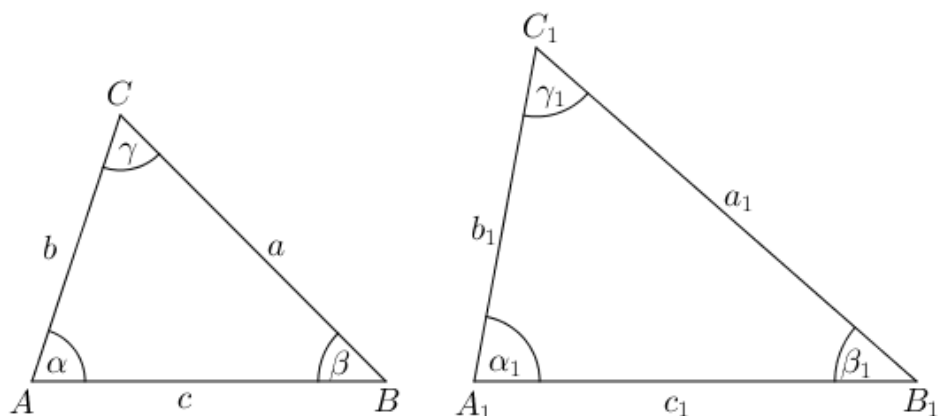
14. СЛИЧНОСТ ТРОУГЛОВА

Сличност је пресликавање којим се нека фигура F пресликава у фигуру F_1 тако да је размера било које две одговарајуће дужи $XY \subset F$ и $X_1Y_1 \subset F_1$ стална :

$$X_1Y_1 = k \cdot XY \quad (k \in \mathbb{R}, k \neq 0)$$

Да су фигуре F и F_1 сличне означавамо са $F \sim F_1$. Број k је коефицијент сличности фигура.

Ако су два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ слични, тада су им одговарајући углови једнаки, а одговарајуће странице пропорционалне.



$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \gamma = \gamma_1, \quad a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$$

Ставови о сличности троуглова:

Два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ су слични ($\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$) ако:

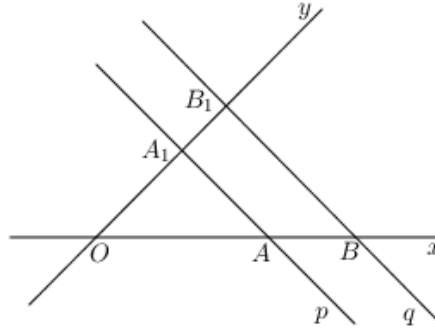
- су два унутрашња угла једног троугла подударна одговарајућим унутрашњим угловима другог троугла. (**углавном ћемо овако испитивати сличност**)
- су две странице једног троугла пропорционалне одговарајућим страницама другог троугла, а унутрашњи углови које те странице образују су подударни.
- су све странице једног троугла пропорционалне одговарајућим страницама другог троугла.
- су две странице једног троугла пропорционалне одговарајућим страницама другог троугла, а унутрашњи углови наспрам већих од ових страница су подударни.

Талесова теорема:

Ако се две праве x и y пресеку двама паралелним правима p и q , онда је размера било које две дужи једне праве једнака размери одговарајућих дужи друге две праве.

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1},$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AA_1}{BB_1}$$

**15. ЧЕТВОРОУГАО**

Четвороугао је многоугао који има четири странице.

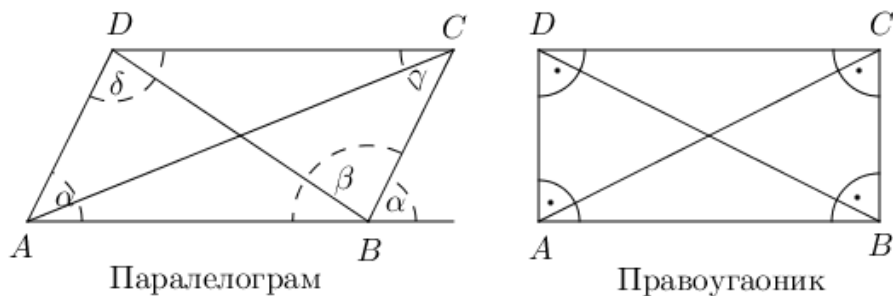
Збир унутрашњих углова четвороугла је 360° , односно важи $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$.

Збир спољашњих углова четвороугла је такође 360° , односно $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 360^\circ$.

Посматраћемо 3 групе четвороуглова: паралелограме, делтоиде и трапезе.

Паралелограм:

- је четвороугао који има два пара наспрамних паралелних страница.
- Наспрамне странице паралелограма су једнаке. ($AB = CD, BC = AD$)
- Дијагонале паралелограма се секу и полове се.
- Збир свака два суседна угла паралелограма је 180° .
- Наспрамни углови паралелограма су једнаки ($\alpha = \gamma, \beta = \delta$).



Правоугаоник:

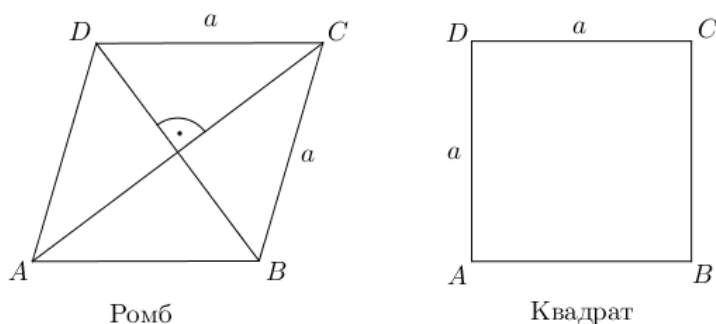
- је паралелограм коме су сви унутрашњи углови прави.
- Дијагонале правоугаоника се секу и полове се.
- Око сваког правоугаоника се може описати кружница.

Ромб:

- је паралелограм коме су све странице једнаке.
- Дијагонале ромба су међусобно нормалне.
- У сваки ромб се може уписати кружница.

Квадрат:

- је правоугаоник чије су све странице једнаке.
- Сви унутрашњи углови квадрата су прави.
- Дијагонале квадрата су једнаке, нормалне су једна на другу и полове се.
- У квадрат се може уписати кружница.
- Око квадрата се може описати кружница.



Трапез:

- је четвороугао који има један пар паралелних страница које се зову основице.
- Друге две (непаралелне) странице трапеza називају се краци.

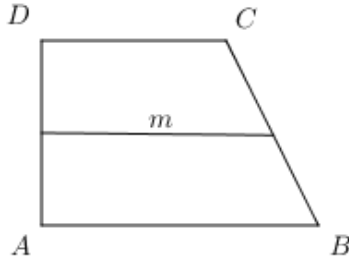
Уколико су краци трапеza једнаки, зовемо га **једнакокраки трапез**. За њега важи:

- Углови на истој основици су једнаки.
- Дијагонале једнакокраког трапеza су једнаке.

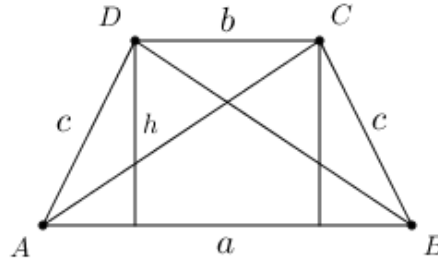
Средња линија трапеца је дуж која спаја средишта кракова тог трапеца. Она је паралелна основицама и једнака половини њиховог збира.

$$m = \frac{a + b}{2}$$

Уколико је један крак трапеца нормалан на основице, такав траpez називамо **правоугли траpez**.



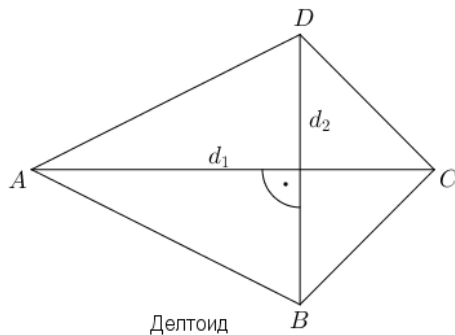
Правоугли траpez



Једнакокраки траpez

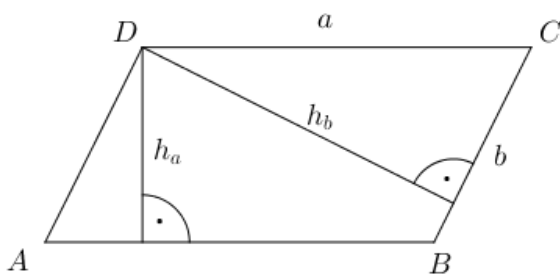
Делтоид:

- је четвороугао чије су дијагонале нормалне и једна од њих полови другу. (нпр. дијагонала d_1 сече дијагоналу d_2 на пола).
- има два пара једнаких суседних страница.

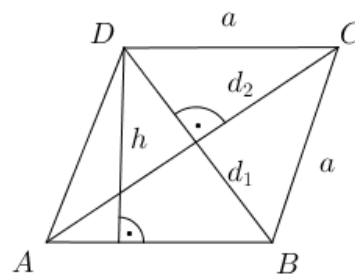


Делтоид

Обим и површина четвороугла



Паралелограм



Ромб

Паралелограм:

$$O = 2 \cdot (a + b)$$

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

Ромб:

$$O = 4 \cdot a$$

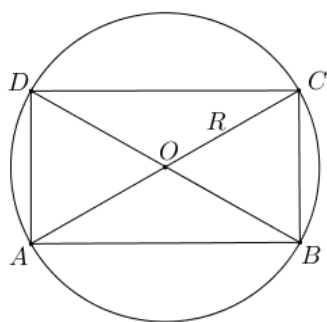
$$P = a \cdot h = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$r = \frac{h}{2}$$

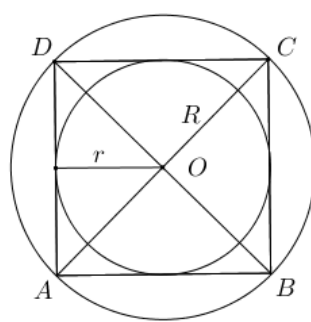
где је r полупречник уписане кружнице.

Напомена: За сваки четвороугао код кога се дијагонале секу под правим углом важи

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$



Правоугаоник



Квадрат

Правоугаоник:

$$O = 2 \cdot (a + b)$$

$$P = a \cdot b$$

$$R = \frac{d}{2}$$

где је R полупречник описане кружнице.

Квадрат:

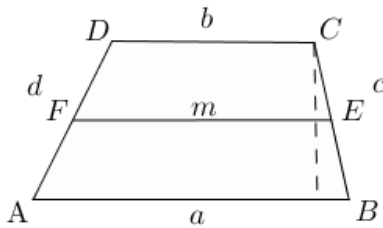
$$O = 4 \cdot a$$

$$P = a^2$$

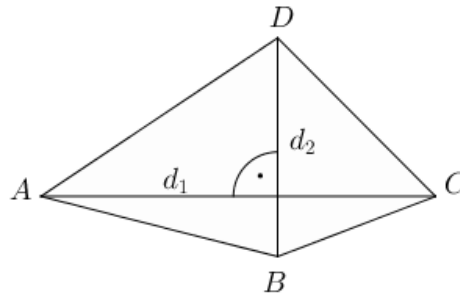
$$r = \frac{a}{2}$$

$$R = \frac{d}{2}$$

где је r полупречник уписане кружнице, а R полупречник описане кружнице.



Трапез



Четвороугао са нормалним дијагоналама

Трапез:

$$O = a + b + c + d$$

$$O = a + b + 2c \text{ (једнакокраки трапез)}$$

$$P = m \cdot h = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Делтоид (четвороугао са нормалним дијагоналама):

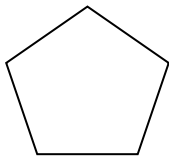
$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

16. МНОГОУГАО И КРУГ

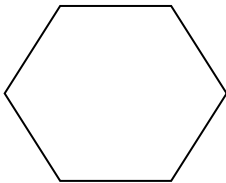
Многоугао:

Примери многоуглова: петоугао, шестоугао,..., n – тоугао, $n \in \mathbb{N}$.

Правилан петоугао:



Правилан шестоугао:



Број дијагонала из једног темена многоугла је

$$d_n = n - 3$$

где је n број страница тог многоугла.

Укупан број дијагонала једног многоугла је

$$D = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Збир свих унутрашњих углова многоугла је

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Многоугао је **правилан** ако су му странице међусобно подударне, као и сви унутрашњи углови.

Унутрашњи угао правилног n – тоугла је

$$\alpha = \frac{S_n}{n} = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$$

За **спољашњи угао** α_1 правилног n – тоугла важи

$$\begin{aligned}\alpha + \alpha_1 &= 180^\circ \\ n \cdot \alpha_1 &= 360^\circ\end{aligned}$$

За **централни угао** правилног n – тоугла важи

$$\varphi = \frac{360^\circ}{n}$$

Обим правилног n – тоугла важи

$$O = n \cdot a$$

где је a дужина странице тог многоугла.

Површина правилног n – тоугла се у општем случају рачуна преко формуле

$$P = \frac{n \cdot a \cdot r}{2}$$

где је a дужина странице многоугла, n број страница тог многоугла, а r полупречник уписаног круга у многоугао.

Неки правилни многоуглови са којима смо се већ сусретали су **једнакостранични троугао**, **квадрат**, **правилан шестоугао**, итд. Њихове формуле за површину су:

$$P_3 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

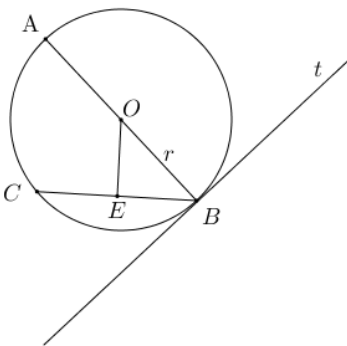
$$P_4 = a^2$$

$$P_6 = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$$

Круг:

Кружница (кружна линија) је скуп свих тачака једне равни које су подједнако удаљене од једне тачке те равни коју називамо центар. Нпр.ако је центар круга тачка **O**,а полупречник круга **r**, кружници припадају све тачке које су од **O** удаљене за **r**.

Круг (кружна површ) је скуп свих тачака у равни које су од тачке **O** на растојању мањем или једнаком од **r**.



AB – пречник круга

OA – полупречник круга

BC – тетива круга

OE – централно растојање

t – тангента круга

Полупречник круга је растојање између центра круга и било које тачке на кружници. Полупречник означавамо са **r**.

Пречник круга је дуж која спаја било које две тачке на кружници и пролази кроз центар круга.

Пречник је два пута дужи од полупречника, и њега обележавамо са **2r**.

Тетива је дуж која спаја две тачке на кружници. Најдужа тетива је **пречник**.

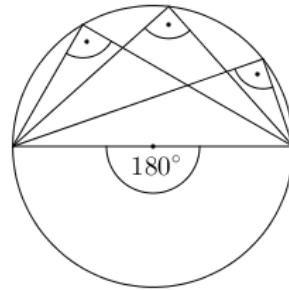
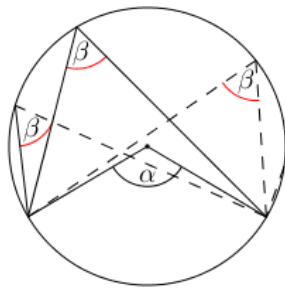
Тангента је права која додирује кружницу у једној тачки. Тангента је нормална на полупречник круга који садржи тачку у којој тангента додирује кружницу.

Периферијски угао је угао чије је теме на кружници,а краци су му тетиве кружнице.

Централни угао је угао чије је теме у центру кружнице,а краци су му полупречници.

Периферијски угао је два пута мањи од централног угла над истим кружним луком.

Периферисјки угао над пречником је прав.



α – централни угао
 β – периферијски угао
 $\alpha = 2\beta$

Обим круга:

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi$$

где је r дужина полупречника круга. $\pi \approx 3.14 = \frac{22}{7}$

Део дужине кружне линије одређене углом α назива се **дужина кружног лука** и износи

$$l = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180^\circ}$$

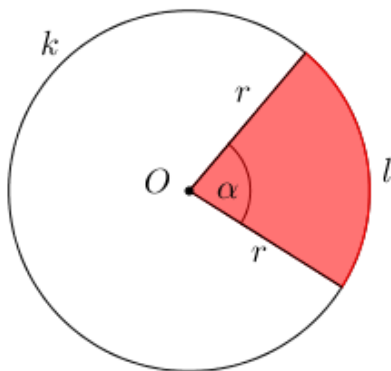
Површина круга:

$$P = r^2 \pi$$

где је r дужина полупречника круга.

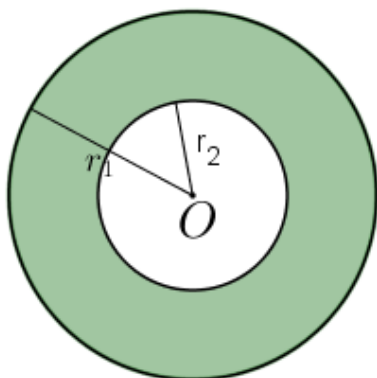
Површина кружног исечка одређеног углом α :

$$P_i = \frac{r \cdot l}{2} = \frac{r^2 \pi \cdot \alpha}{360^\circ}$$



Површина кружног прстена:

$$P = r_1^2 \pi - r_2^2 \pi$$



17. ПРИЗМА

Полиедар је геометријско тело ограничено равним плочама, односно вишеугаоним полигонима.

Призма је геометријски полиедар ограничен са два подударна и паралелна многоугла као основама и паралелограмима на боковима.

Делови призме су основа (база) и омотач.

Основни елементи призме су темена, основне ивице и бочне ивице.

Уколико су базе призме паралелограми, призма се назива **паралелепипед** и има 6 страна.

Висина призме (ознака ***H***) је дужина нормале спуштене из било које тачке једне базе на раван друге базе те призме.

Општи обрасци за рачунање површине и запремине призме су

$$P = 2B + M$$

$$V = BH$$

где ***B*** представља површину основе призме, ***M*** површину омотача, а ***H*** висину.

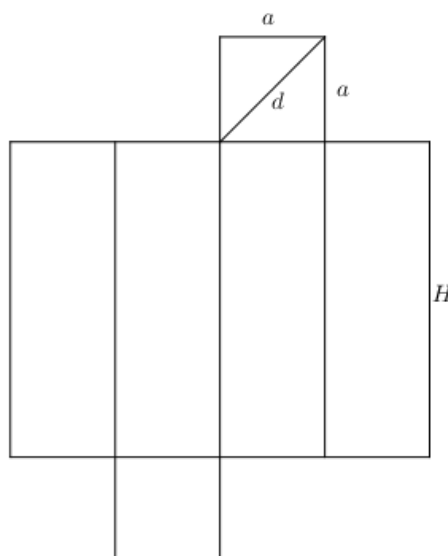
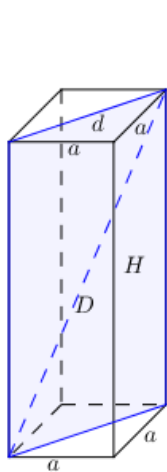
Површину омотача можемо израчунати по формули

$$M = OH$$

где је ***O*** обим базе те призме, ***H*** је висина призме.

Неке карактеристичне призме:

- **Правилна четворострана призма** (основе квадрати, бочне стране правоугаоници)



$$B = a^2$$

$$M = 4aH$$

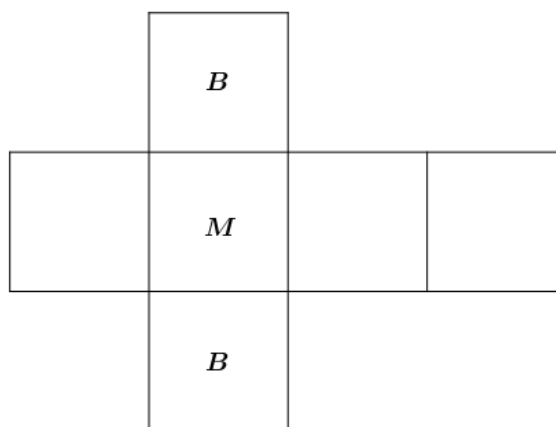
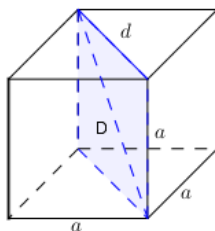
$$P = 2a^2 + 4aH$$

$$V = a^2H$$

$$d = a\sqrt{2}$$

$$P_D = a\sqrt{2}H$$

- **Правилни хексаедар (коцка)** (основе квадрати, бочне стране квадрати)



$$B = a^2$$

$$M = 4a^2$$

$$P = 6a^2$$

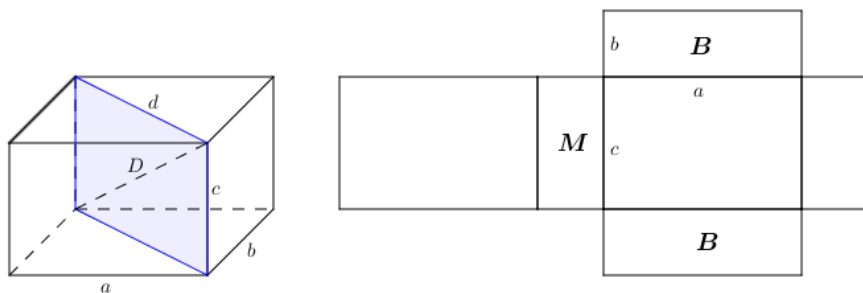
$$V = a^3$$

$$d = a\sqrt{2}$$

$$D = a\sqrt{3}$$

$$P_D = a^2\sqrt{2}$$

- **Правоугли хексаедар (кубар)** (основе правоугаоници, бочне стране правоугаоници)



$$B = ab$$

$$M = 2c(a + b)$$

$$P = 2(ab + ac + bc)$$

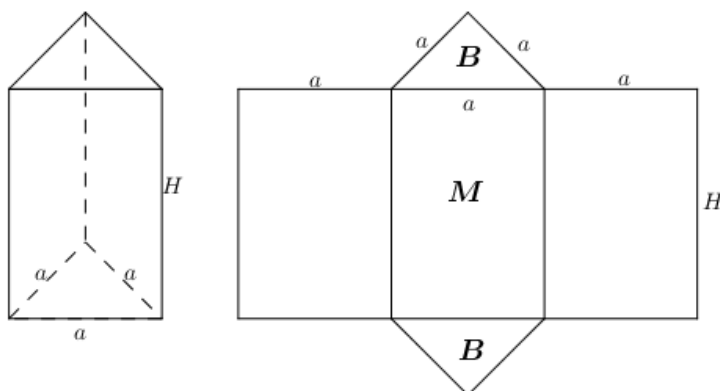
$$V = abc$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$P_D = c\sqrt{a^2 + b^2}$$

- **Правилна троуграна призма** (основе једнакоугранични троуглови, бочне стране правоугаоници)



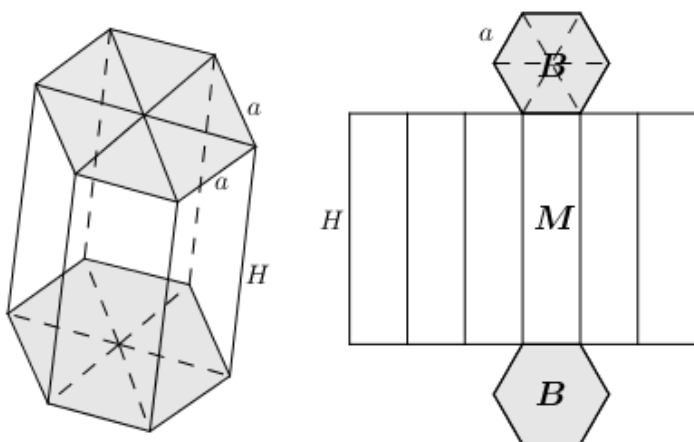
$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$M = 3aH$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} H$$

- Правилна шестострана призма (основе правилни шестоуглови, бочне стране правоугаоници)



$$B = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$$

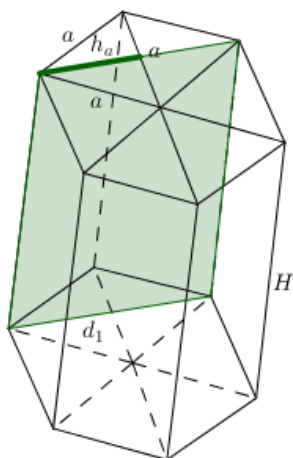
$$M = 6aH$$

$$P = 3a^2\sqrt{3} + 6aH$$

$$V = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} H$$

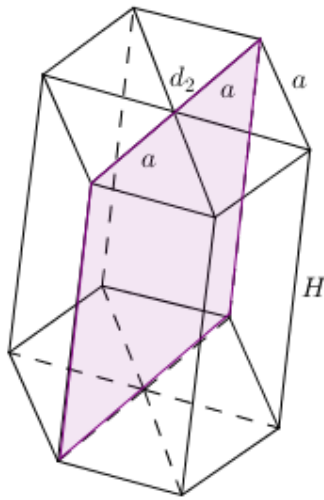
Треба обратити пажњу на дијагоналне пресеке правилне шестостране призме:

- Мали дијагонални пресек:



$$P = d_1 H = 2h_a H = a\sqrt{3}H$$

- Велики дијагонални пресек:



$$P = d_2 H = 2aH$$

18. ПИРАМИДА

Пирамида је полиедар ограничен основом (базом) и страницама које се спајају у једној тачки (теме) која се налази на супротној страни од основе.

Правилна пирамида је она чија је основа правилан многоугао.

Образац за рачунање површине пирамиде је

$$P = B + M$$

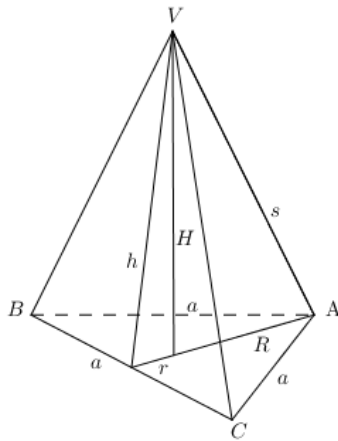
Образац за рачунање запремине пирамиде је

$$V = \frac{1}{3}BH$$

Ознаке:

- B – површина основе
- M – површина омотача
- H – висина пирамиде

Правилна тространа пирамида: (основа – једнакостранични троугао, странице – једнакокраки троуглови)



a - основна ивица
 H - висина пирамиде
 h - висина бочне стране (апотема)
 s - бочна ивица

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$P = B + M = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \frac{ah}{2}$$

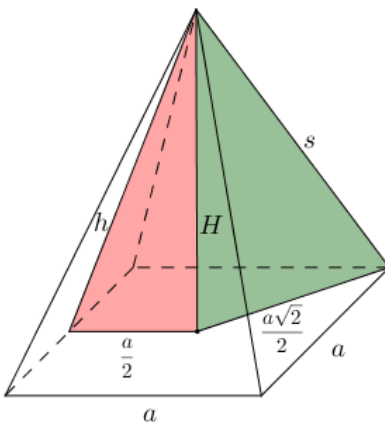
$$V = \frac{1}{3} BH = \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} H$$

Обратите пажњу на правоугле троуглове унутар пирамиде – помоћу њих коришћењем Питагорине теореме можете рачунати непознате величине!!!

$$h^2 = H^2 + r^2$$

$$s^2 = H^2 + R^2$$

Правилна четворострана пирамида: (основа – квадрат, странице – једнакокраки троуглови)



H - висина пирамиде
 h - висина бочне стране (апотема)
 s - бочна ивица

$$P = B + M = a^2 + 4 \frac{ah}{2} = a^2 + 2ah$$

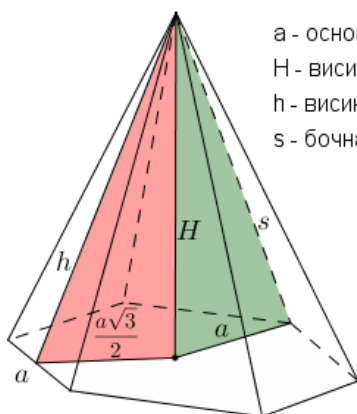
$$V = \frac{1}{3} BH = \frac{1}{3} a^2 H$$

Обратите пажњу на правоугле троуглове унутар пирамиде – помоћу њих коришћењем Питагорине теореме можете рачунати непознате величине!!!

$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$s^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Правилна шестострана пирамида: (основа – шестоугао, странице – једнакокраки троуглови)



a - основна ивица
H - висина пирамиде
h - висина бочне стране (апотема)
s - бочна ивица

$$P = B + M = 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + 6 \frac{ah}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} BH = \frac{1}{3} 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} H = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} H$$

Обратите пажњу на правоугле троуглове унутар пирамиде – помоћу њих коришћењем Питагорине теореме можете рачунати непознате величине!!!

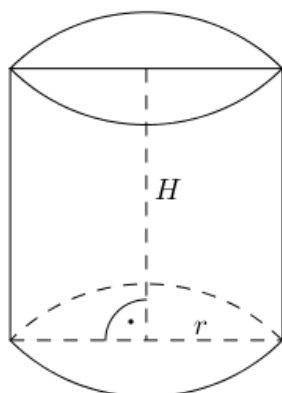
$$s^2 = H^2 + a^2$$

$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

19. ВАЉАК

Ваљак је геометријско тело које се састоји од две основе (базе) и омотача.

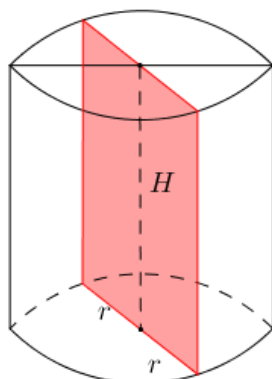
Основе ваљка чине два круга једнаког полупречника док је омотач ваљка правоугаоник коме је дужина једне странице једнака обиму круга, док је дужина друге странице једнака висини ваљка.



H - висина ваљака
 r - полупречник основе ваљака

$$P = 2B + M = 2r^2\pi + 2r\pi H$$

$$V = BH = \frac{1}{3} r^2 \pi H$$



Осни пресек ваљка настаје када га нека равна пресече по оси.

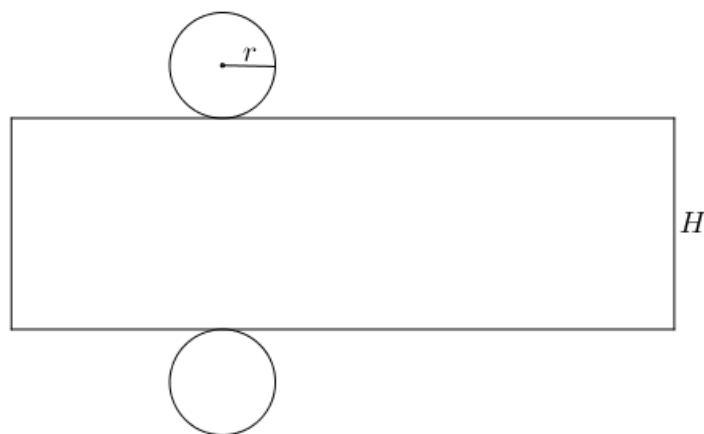
Као што се види на слици, осни пресек ваљка је правоугаоник чије су стране $2r$ и H .

Површина осног пресека ваљка је

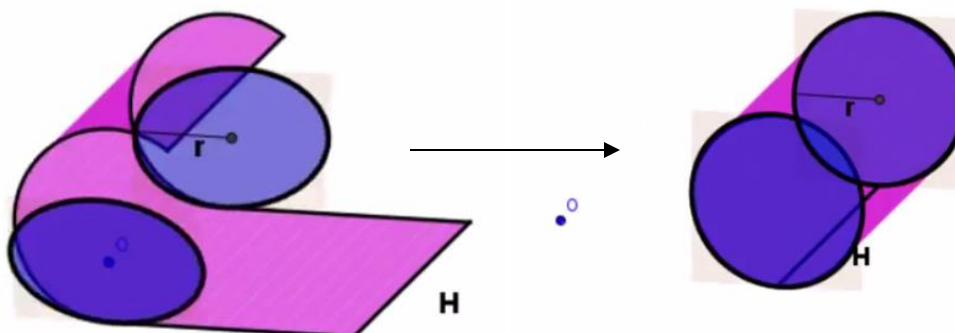
$$P_{op} = 2rH$$

Уколико је ваљак једнакостранични, његов осни пресек је квадрат, односно важи $2r = H$

Мрежа ваљка може се видети на слици:



Када се мрежа „урола“ настане ваљак:

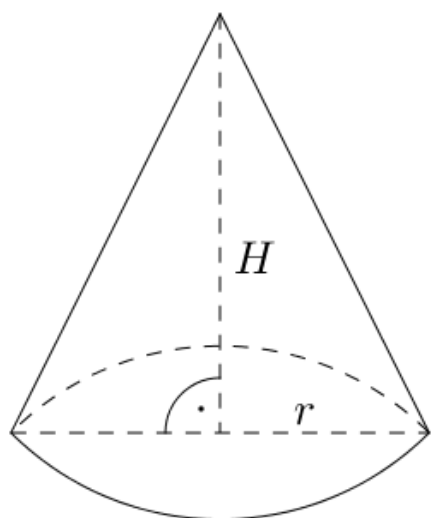


20. КУПА

Купа је геометријско тело које се састоји из основе и омотача. Основа купе је круг, док је омотач обртна конусна површ.

Висина купе спаја врх купе и центар круга који је у основи купе.

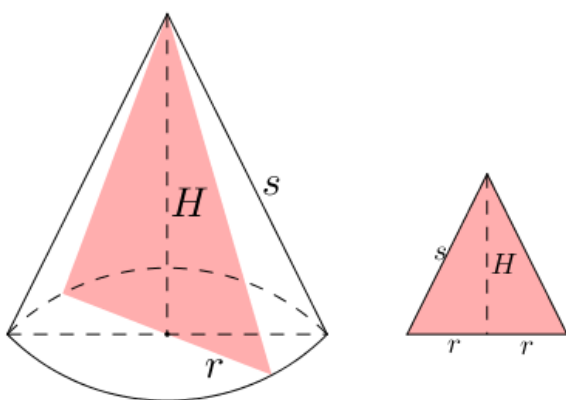
Изводница купе је дуж која спаја врх купе и кружницу у основи.



H - висина купе
 r - полупречник основе

$$P = B + M = r^2\pi + r\pi s$$

$$V = \frac{1}{3} BH = \frac{1}{3} r^2\pi H$$



Осни пресек купе настаје када је нека равна пресеке по оси.

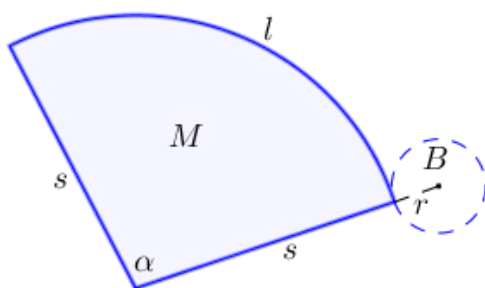
Као што се види на слици, осни пресек купе је једнакокраки троугао основице $2r$ и крака s .

Површина осног пресека купе је

$$P_{op} = rH$$

Уколико је купа једнакостранична, њен осни пресек је једнакостранични троугао, односно важи $2r=s$

Мрежа купе:



Извођење површине омотача купе:

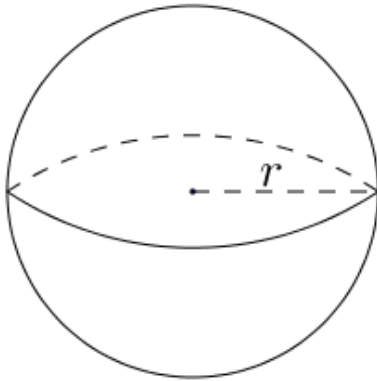
$$M = \frac{l \cdot s}{2} = \frac{2r\pi \cdot s}{2} = r\pi s$$

21. ЛОПТА

Лопта је геометријско тело ограничено сфером (омотачем лопте).

Сфера је скуп тачака једнако удаљених од неке тачке у простору (удаљеност обележавамо са r), док лопти припадају све тачке које су на мањој или једнакој удаљености од r од те тачке (центра лопте).

Велики круг лопте добија се када се лопта пресече са равни тако да та равна садржи центар.



r - полупречник лопте

P_1 - површина великог круга лопте

O_1 - обим великог круга лопте

$$P = 4r^2\pi$$

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi$$

$$P_1 = r^2\pi$$

$$O_1 = 2r\pi$$

Лопта настаје ротацијом неког полукруга око његовог пречника.

